ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής
Γενικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Πατρών

Γενικευμένα συστήματα συντεταγμένων

Περιεχόμενα

- Καμπύλες συντεταγμένες
- Παράγωγοι σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων, τελεστής Laplace.
- Ενδεικτικά συστήματα συντεταγμένων.

Γενικότητες

Στη μελέτη φυσικών προβλημάτων είναι πολλές φορές αναγκαία η χρήση του συστήματος συντεταγμένων οι οποίες ενδείκνυνται λόγω συμμετρίας στο εκάστοτε πρόβλημα.

- Παραδείγματος χάριν, σε προβλήματα με αξονική και σφαιρική συμμετρία ενδείκνυται η χρήση κυλινδρικών και σφαιρικών συντεταγμένων, αντίστοιχα.
- Η ανάπτυξη του απαραίτητου φορμαλισμού είναι κοινή για όλα τα συστήματα συντεταγμένων.

Αναγκαίο μαθηματικό υπόβαθρο

Προς διευκόλυνση στην ανάπτυξη του αναγκαίου φορμαλισμού θα χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη σύμβαση κατά Einstein σε αθροίσεις, καθώς και τα σύμβολα δ-Kronecker και Levi-Civita. Η χρησιμότητά τους είναι μεγάλη σε διάφορους κλάδους της Φυσικής.

- Για χρηστική ευκολία θα χρησιμοποιούμε τη σύμβαση Einstein για αθροίσματα δεικτών που εμφανίζονται σε γινόμενα συνιστωσών διανυσμάτων κλπ. Σύμφωνα με αυτή, επαλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται. π.χ. το εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων γράφεται

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_i B_i \ . \tag{1}$$

Περιπτώσεις όπου δεν πρέπει να γίνεται άθροιση επαναλαμβανόμενων δεικτών είναι συνήθως προφανής.

- Το δ του Kronecker ορίζεται ως

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \ , \\ 0 & i \neq j \ . \end{cases} \tag{2}$$

Αποτελεί το ανάλογο της δ-συνάρτησης για διακριτές συντεταγμένες.

- Το σύμβολο Levi–Civita ϵ_{ijk} είναι:
  - Αντισυμμετρικό ως προς οποιαδήποτε εναλλαγή δεικτών

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj} \ . \tag{3}$$

  - Έχει μια ανεξάρτητη συνιστώσα την $\epsilon_{123} = 1$.
  - Η ιδιότητα

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \ , \tag{4}$$

  - και οι επακόλουθες

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \ , \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \ , \tag{5}$$

είναι χρήσιμες σε αποδείξεις ταυτοτήτων με διανύσματα.

- Ως παράδειγμα θεωρούμε την i-συνιστώσα του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων. Αυτή γράφεται

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \ .$$

Με χρήση των ανωτέρω ιδιοτήτων έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i (\mathbf{C} \times \mathbf{D})_i \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} A_j B_k C_m D_n = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) A_j B_k C_m D_n \\
&= (A_j C_j)(B_k D_k) - (A_j D_j)(B_k C_k) \\
&= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \ .
\end{aligned}$$

Μοναδιαία διανύσματα

Θεωρούμε στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^3$ τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}^a$, $a = 1, 2, 3$ με συνιστώσες $\hat{\mathbf{x}}^a = (\hat{x}_1^a, \hat{x}_2^a, \hat{x}_3^a)$. Υποθέτουμε:

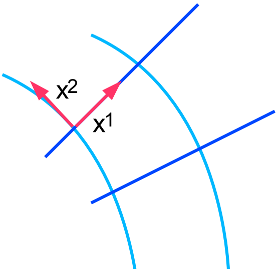
$$\text{ορθογωνιότητα}: \quad \hat{\mathbf{x}}^a \cdot \hat{\mathbf{x}}^b = \hat{x}_i^a \cdot \hat{x}_i^b = \delta_{ab} \tag{6}$$

και

$$\text{πληρότητα}: \quad \hat{x}_i^a \cdot \hat{x}_j^a = h_i^2 \delta_{ij} \ , \tag{7}$$

απ΄ τις οποίες συνεπάγεται ότι

$$\hat{\mathbf{x}}^a \times \hat{\mathbf{x}}^b = \epsilon_{abc} \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{c}} \ . \tag{8}$$



Με αυτές τις ιδιότητες τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{a}}$:

- Αποτελούν βάση και κάθε διάνυσμα μπορεί να αναπτυχθεί ως
$$\mathbf{V} = V_a \hat{\mathbf{x}}^a \ . \qquad (9)$$
- Η στοιχειώδης μετατόπιση και το μέτρο της είναι
$$d\mathbf{s} = h_a dx^a \hat{\mathbf{x}}^a \ , \qquad ds^2 = h_a^2 dx^a dx^a \ . \qquad (10)$$
- Η φυσική μετατόπιση στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{x}}^a$ είναι $h_a dx^a$ και έχει μονάδες μήκους, οι συντεταγμένες x^a μπορεί να έχουν διαφορετικές.
- Ο στοιχειώδης όγκος είναι
$$dV = h_1 h_2 h_3 dx^1 dx^2 dx^3 \ . \qquad (11)$$
- Η στοιχειώδης επιφάνεια στο επίπεδο $x^3 =$σταθερά, είναι
$$dS_{12} = h_1 h_2 dx^1 dx^2 \qquad (12)$$
και κυκλικά στα $1, 2, 3$.

Παράγωγοι

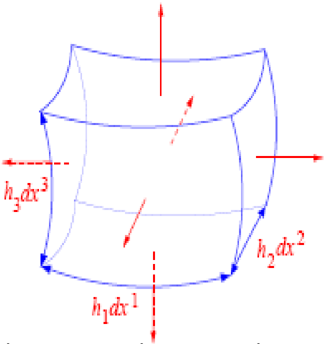
Κατευθυνόμενη παράγωγος - Ανάδελτα: Για μια συνάρτηση $F(\mathbf{x})$ το ολικό διαφορικό είναι

$$\begin{aligned} dF &= \nabla F \cdot d\mathbf{s} = h_a dx^a \nabla F \cdot \hat{\mathbf{x}}^a \\ &= \partial_i F dx^i \ , \end{aligned} \tag{13}$$

από όπου η κατευθυνόμενη παράγωγος βρίσκεται ως

$$\nabla F = \frac{1}{h_i} \partial_i F \hat{x}^i \ . \tag{14}$$

Απόκλιση διανύσματος: Ως απόκλιση διανύσματος **V** ορίζεται η ροή του από στοιχειώδη όγκο διά του όγκο αυτού.



Σχήμα: Ροή διανύσματος απ΄ την επιφάνεια στοιχειώδους όγκο.

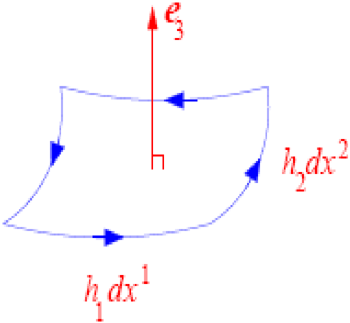
Απ΄ το σχήμα έχουμε ότι η στοιχειώδης ροή από δύο πλευρές είναι:

$$dx^2 dx^3 h_2 h_3 V_1\Big|_{(x^1+dx^1,x^2,x^3)} - dx^2 dx^3 h_2 h_3 V_1\Big|_{(x^1,x^2,x^3)} \simeq dx^1 dx^2 dx^3 \frac{\partial(h_2 h_3 V_1)}{\partial x^1} \ .$$

Αθροίζοντας τις συνεισφορές και απ΄ τις άλλες πλευρές και διαιρώντας με τον στοιχειώδη όγκο έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h}\partial_i\left(\frac{h}{h_i}V_i\right) \ , \qquad h = h_1 h_2 h_3 \ . \tag{15}$$

Στροβιλισμός διανύσματος: Ως στροβιλισμός διανύσματος **V** ορίζεται το διάνυσμα κάθετο σε μιά στοιχειώδη επιφάνεια με μέτρο το ολοκλήρωμα του γύρω απ΄ το σύνορο της επιφάνειας διαιρεμένο με το εμβαδόν της.



Σχήμα: Στροβιλισμός διανύσματος.

Απ' το σχήμα έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
& h_1 dx^1 V_1\Big|_{(x^1,x^2,x^3)} - h_1 dx^1 V_1\Big|_{(x^1,x^2+dx^2,x^3)} \\
& + h_2 dx^2 V_2\Big|_{(x^1+dx^1,x^2,x^3)} - h_2 dx^2 V_2\Big|_{(x^1,x^2,x^3)} \\
& \simeq \left[\frac{\partial(h_2 V_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 V_1)}{\partial x^2}\right] dx^1 dx^2 \ .
\end{aligned}
$$

Άρα διαιρώντας και με το εμβαδό $h_1 h_2 dx^1 dx^2$ παίρνουμε

$$
A_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 V_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(h_1 V_1)}{\partial x^2}\right] \quad \text{και κυκλικά στα } 1,2,3 \ . \qquad (16)
$$

Με συμπαγή συμβολισμό

$$
\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{V} \quad \Longrightarrow \quad A_i = \frac{h_i}{h}\epsilon_{ijk}\partial_j(h_k V_k) \ . \qquad (17)
$$

- Σημειώνω ότι η απόκλιση και ο στροβιλισμός των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι εν γένει μη μηδενικά

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\mathbf{x}}^i &= \frac{1}{h}\partial_i \frac{h}{h_i} \ , \\ \nabla \times \hat{\mathbf{x}}^1 &= \frac{1}{h_1}\left[\hat{\mathbf{x}}^2 \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x^3} - \hat{\mathbf{x}}^3 \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x^2}\right] \end{aligned} \tag{18}$$

και κυκλικά στα $1, 2, 3$.

- Επίσης απ΄ την

$$\hat{\mathbf{x}}^i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x^i} \ , \tag{19}$$

μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^i}{\partial x^j} = \hat{\mathbf{x}}^j \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial x^i} \ , \qquad i \neq j \tag{20}$$

και

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}^i}{\partial x^i} = -\sum_{j\neq i} \hat{\mathbf{x}}^j \frac{1}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial x^j} \ . \tag{21}$$

Η Λαπλασιανή

Η Λαπλασιανή ως τελεστής εμφανίζεται πρακτικά σε όλους τους κλάδους της Φυσικής και των εφαρμογών της.

- Η μορφή της ως δεύτερης τάξης διαφορικός τελεστής εξαρτάται απ΄ το αν δρά σε βαθμωτές συναρτήσεις, σε διανύσματα κλπ.
- Η Λαπλασιανή βαθμωτής συνάρτησης ορίζεται ως

$$\nabla \cdot \nabla F = \nabla^2 F = \frac{1}{h}\partial_i \left(\frac{h}{h_i^2}\partial_i F \right) . \tag{22}$$

- Η Λαπλασιανή διανύσματος ορίζεται ως

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) . \tag{23}$$

Μόνο σε Καρτεσιανές συντεταγμένες ισχύει ότι $(\nabla^2 \mathbf{A})_i = \nabla^2 A_i$.

- (συνέχεια). Π.χ. σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{A}\Big|_\rho &= \nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \ , \\
\nabla^2 \mathbf{A}\Big|_\phi &= \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \ , \\
\nabla^2 \mathbf{A}\Big|_z &= \nabla^2 A_z \ .
\end{aligned}
$$

- Η $\nabla^2 \mathbf{A}$ εμφανίζεται στις εξισώσεις Navier–Stokes στη μηχανική ρευστών, στη διάδοση ΗΜ κύματων κλπ.

Αλλαγή συντεταγμένων

Ας θεωρήσουμε δύο συστήματα συντεταγμένων x_i και y_i. Η στοιχειώδης μετατόπιση δίνεται από

$$d\mathbf{s} = h_i dx^i \hat{x}^i = H_i dy^i \hat{y}^i \ . \tag{24}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$ παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{i}} = \frac{H_j}{h_i}\,\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\hat{\mathbf{y}}^{\mathbf{j}} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\mathbf{y}}^{\mathbf{i}} = \frac{h_j}{H_i}\,\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\,\hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{j}} \ . \tag{25}$$

Απ′ τις σχέσεις $\hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{y}}^{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{y}}^{\mathbf{j}} = \delta_{ij}$ και τις (24), (25) έχουμε τη σχέση συμβατότητας

$$\frac{H_k^2}{h_i h_j}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^k}{\partial x^j} = \delta_{ij} \ , \tag{26}$$

την οποία πρέπει η αλλαγή συντεταγμένων να ικανοποιεί.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης και η αλλαγή των συνιστωσών των διανυσμάτων στα δύο συστήματα αναφοράς. Απ΄ την

$$\mathbf{V} = u_i \hat{\mathbf{x}}^{\mathbf{i}} = v_i \hat{\mathbf{y}}^{\mathbf{i}} \tag{27}$$

και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων βρίσκουμε ότι

$$u_i = \frac{h_i}{H_j} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} v_j \quad \Longleftrightarrow \quad v_i = \frac{H_i}{h_j} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} u_j \ . \tag{28}$$

Παραδείγματα γενικευμένων συστημάτων συντεταγμένων

Κυλινδρικές συντεταγμένες: Με τον συμβολισμό

$$(x_1, x_2, x_3) = (\rho, \phi, z) \ , \qquad \rho \geqslant 0 \ , \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi \ , \quad -\infty < z < \infty \ ,$$

έχουμε

$$h_1 = 1 \ , \quad h_2 = \rho \ , \quad h_3 = 1 \ . \tag{29}$$

Η αλλαγή συντεταγμένων από Καρτεσιανές είναι

$$x = \rho \cos\phi \ , \qquad y = \rho \sin\phi \ , \qquad z = z \ .$$

Η σχέση μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \cos\phi \ \hat{x} + \sin\phi \ \hat{y} \ , \\ \hat{\phi} &= -\sin\phi \ \hat{x} + \cos\phi \ \hat{y} \ , \\ \hat{z} &= \hat{z} \ . \end{aligned} \tag{30}$$

Παρατηρείστε ότι

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\phi} = \hat{\phi} \ . \tag{31}$$

Έστω μια συνάρτηση $F = F(\rho, \phi, z)$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{V} = V_\rho \hat{\rho} + V_\phi \hat{\phi} + V_z \hat{z}$. Έχουμε:

- Κατευθυνόμενη παράγωγος

$$\nabla F = \partial_\rho F \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \partial_\phi F \hat{\phi} + \partial_z F \hat{z} \ , \tag{32}$$

- Απόκλιση

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\phi V_\phi + \partial_z V_z \ , \tag{33}$$

- Στροβιλισμός

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} = & \frac{1}{\rho} (\partial_\phi V_z - \rho \partial_z V_\phi) \hat{\rho} + (\partial_z V_\rho - \partial_\rho V_z) \hat{\phi} \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\partial_\rho (\rho V_\phi) - \partial_\phi V_\rho \right] \hat{z} \ , \end{aligned} \tag{34}$$

- Λαπλασιανή

$$\nabla^2 F = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho F) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 F + \partial_z^2 F \ . \tag{35}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες: Με τον συμβολισμό

$$(x_1, x_2, x_3) = (r, \theta, \phi) \ , \qquad r \geqslant 0 \ , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \ , \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi \ ,$$

έχουμε

$$h_1 = 1 \ , \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin\theta \ . \tag{36}$$

Η αλλαγή συντεταγμένων από Καρτεσιανές είναι

$$x = r\sin\theta\cos\phi \ , \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \ , \qquad z = r\cos\theta \ .$$

Η σχέση μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin\theta\cos\phi\ \hat{x} + \sin\theta\sin\phi\ \hat{y} + \cos\theta\ \hat{z} \ , \\ \hat{\theta} &= \cos\theta\cos\phi\ \hat{x} + \cos\theta\sin\phi\ \hat{y} - \sin\theta\ \hat{z} \ , \\ \hat{\phi} &= -\sin\phi\ \hat{x} + \cos\phi\ \hat{y} \ . \end{aligned} \tag{37}$$

Παρατηρείστε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} &= \hat{\theta} \ , \\ \frac{\partial \hat{r}}{\partial \phi} &= \frac{\hat{\phi}}{\sin\theta} \ . \end{aligned}$$

Έστω συνάρτηση $F = F(r, \theta, \phi)$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{V} = V_r \hat{r} + V_\theta \hat{\theta} + V_\phi \hat{\phi}$. Έχουμε:

- Κατευθυνόμενη παράγωγος

$$\nabla F = \partial_r F \hat{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta F \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi F \hat{\phi} \ . \tag{38}$$

- Απόκλιση

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi V_\phi \ . \tag{39}$$

- Στροβιλισμός

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} = & \frac{1}{r \sin\theta} \left[\partial_\theta (\sin\theta V_\phi) - \partial_\phi V_\theta \right] \hat{r} \\ & + \frac{1}{r \sin\theta} \left[\partial_\phi V_r - \sin\theta \partial_r (r V_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\partial_r (r V_\theta) - \partial_\theta V_r \right] \hat{\phi} \ , \end{aligned} \tag{40}$$

- Λαπλασιανή

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r F) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta F) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi^2 F \ . \tag{41}$$

Ελλειπτικές συντεταγμένες: Με το συμβολισμό

$$(x_1, x_2, x_3) = (u, v, \phi) \ , \qquad u \geqslant 0 \ , \quad 0 \leqslant v \leqslant \pi \ , \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi \ ,$$

έχουμε

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} \ , \quad h_3 = \sinh u \sin v \ . \tag{42}$$

Η αλλαγή συντεταγμένων από Καρτεσιανές είναι

$$x = \sinh u \sin v \cos\phi \ , \qquad y = \sinh u \sin v \sin\phi \ , \qquad z = \cosh u \cos v \ .$$

Σε αυτή την περίπτωση η Λαπλασιανή γράφεται

$$\nabla^2 F = \frac{1}{\cosh^2 u - \cos^2 v} \left[\frac{1}{\sinh u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\sinh u \frac{\partial F}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \frac{\partial F}{\partial v} \right) \right] + \frac{1}{\sinh^2 u \sin^2 v} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \ .$$

Αυτό το σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται σε προβλήματα που οι αλληλεπιδράσεις είναι μεν σφαιρικά συμμετρικές, αλλά προέρχονται από δύο κέντρα.